Exercices loi binomiale

Exercice 1

Dans une région pétrolifère, la probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est 0,1.

1) Justifier que la réalisation d'un forage peut être assimilée à une épreuve de Bernoulli.
2) On effectue 9 forages.

   a. Quelle hypothèse doit-on formuler pour que la variable aléatoire X correspondant au nombre de forages qui ont conduit à une nappe de pétrole suive une loi binomiale ?

   b. Sous cette hypothèse, calculer la probabilité qu'au moins un forage conduise à une nappe de pétrole. En donner la valeur à 10^{-3} près.

Exercice 2

Un constructeur de composants produit des résistances. La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est égale à 5×10^{-3}.

Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir

a. Exactement deux résistances défectueuses ?

b. Au plus deux résistances défectueuses ?

c. Au moins deux résistances défectueuses ?

Exercice 3

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.

On considère un entier positif ou nul n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours consécutifs.

1) Quelle est la loi de X ?
2) Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ? au moins 4 filles ?
3) Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

Exercice 4

Afin de créer une loterie, on place dans une urne n boules différentes ($n \geq 3$) dont deux et deux seulement sont gagnantes. On choisit au hasard deux boules de l'urne en remettant la première boule tirée avant d'en tirer une seconde.

1) On suppose dans cette question que $n = 10$. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de boules gagnantes parmi les deux choisies. Déterminer la loi de probabilité de Y.
2) On revient au cas général. Calculer la probabilité q_n d'avoir exactement une boule gagnante parmi les deux.

Exercice 5

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0,4.

1) Calculer $p(X = 3)$; $p(X = 17)$; $p(X = 10)$.
2) Calculer $p(X \leq 1)$; $p(X \geq 18)$; $p(X \leq 15)$ et $p(X \geq 10)$.

Exercices loi binomiale (Espérance et écart type)

Exercice 1

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de $15km.h^{-1}$.
Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{2}{3}$.
Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps en minute mis par l'élève pour aller au lycée.

1) Déterminer la loi de probabilités de X.
2) Exprimer T en fonction de X.
3) Déterminer $E(T)$ et interpréter ce résultat.
4) L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
   a. Peut-il espérer être à l'heure ?
   b. Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

Exercice 2

Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité qu'Alain gagne une rencontre est 0,6.Ils décident de jouer trois matchs dans l' année (les résultats des matchs sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. A la fin de chaque match, le perdant versera 20€.
Benjamin s'interroge sur sa dépense éventuelle en fin d'année.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de matchs gagnés par Benjamin et D la variable aléatoire correspondant à la dépense de Benjamin.

a. Quelles sont les valeurs possibles de X ? Exprimer D en fonction de X et en déduire les valeurs possibles de D.

b. Démontrer que la probabilité que Benjamin dépense 40€ est 0,432.

c. Calculer l' espérance de dépense en fin d' année de Benjamin.

Exercice 3

Un pépiniériste conditionne des bulbes de fleurs .On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit. On considère que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de 0,83.
Il prélève au hasard successivement quinze bulbes de ce stock. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de bulbes qui germent.

1) Quelle est la loi de X ?
2) Quelle est la probabilité qu'exactement 5 bulbes choisis germent ?
3) Quelle est la probabilité qu'au moins 9 bulbes germent ?
4) En moyenne, sur un prélèvement de 15 bulbes, combien vont germer ?

Exercice 4

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets.
On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.
Un trajet coûte 10€ ; en cas de fraude, l'amende est de 100€. Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

1) On suppose que $p = 0,05$.
   a. Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Théo soit contrôlé au plus 2 fois.
   b. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par Théo. Justifier que $Z = 400 - 110X$ puis calculer $E(Z)$.
2) On ne connaît plus la valeur de p.

Pour quelles valeurs de p, la fraude systématique est-elle favorable à Théo ? Justifier.

DM pour le 21 mai 2020

Étant donné un gène possédant un couple d'allèles A et a, on dit qu'une plante est **homozygote** lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles sur une paire de chromosomes homologues : elle est alors de génotype AA ou aa.
Une plante est **hétérozygote** lorsqu'elle est de génotype Aa. Certaines plantes, le lupin par exemple, se reproduisent par autogamie (ou autofécondation) : tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard.

I. Cas N°1 : L'objectif de cette partie est l'étude de la descendance par autogamie d'une plante hétérozygote.

Partie A : Générations successives

1°) Première génération

Une plante de génotype AA donne par autogamie une plante de génotype AA. De même, une plante de génotype aa donne une plante aa.
Déterminer à l'aide d'un échiquier de croisement les probabilités que la descendance de première génération d'une plante de génotype Aa soit une plante de génotype AA, Aa ou aa.
Les génotypes Aa et aA sont identiques.

2°) Générations suivantes

Partant d'une plante hétérozygote (Aa à la génération 0), on constitue par autogamie des générations successives. On utilise les notations suivantes :

- X_n est l'événement « la plante de la n-ième génération est de génotype AA »,
- Y_n est l'événement « la plante de la n-ième génération est de génotype Aa »,
- Z_n est l'événement « la plante de la n-ième génération est de génotype aa ».

Pour tout entier naturel n, on appelle x_n, y_n, z_n les probabilités respectives de $(\mathrm{AA})_n$, $(\mathrm{Aa})_n$, $(\mathrm{aa})_n$.

a) Quelles sont les valeurs de x_0, y_0, z_0 ? En déduire celles de x_1, y_1, z_1.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, exprimer les probabilités conditionnelles suivantes :

- X_{n+1} sachant X_n
- X_{n+1} sachant Y_n
- Y_{n+1} sachant Y_n.

c) Démontrer, en utilisant les résultats précédents, que pour tout entier naturel n :

$x_{n+1} = x_n + \dfrac{y_n}{4}$ et $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{2}$.

c) En déduire l'expression de z_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

Partie B : Évolution dans le temps

1°) Conjectures

a) Utiliser la calculatrice pour déterminer les valeurs de x_n, y_n et z_n pour chaque entier naturel n compris entre 0 et 10. On remplira un tableau en écrivant les troncatures à la sixième décimale.
b) Que peut-on conjecturer sur le comportement de ces trois suites ?

2°) Étude des suites (x_n), (y_n) et (z_n)

a) Quelle est la nature de la suite (y_n) ? Pour tout entier naturel n, exprimer y_n en fonction de n.

b) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de x_n puis de z_n en fonction de n.

c) Quelles sont les conséquences des résultats obtenus ?