Probabilités

I - Variable aléatoire

1) Définition-exemple

On associe fréquemment un nombre aux résultats d'une expérience aléatoire. Par exemple, pour un jeu de hasard, on peut associer un gain (ou une perte) à chaque issue du jeu.

Exemple :
On lance 2 fois successivement une pièce et on regarde la face obtenue. Chaque "Pile" fait gagner 5€et chaque "Face" fait perdre 2€. L'univers associé est : $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$.
Les gains possibles sont :

Définition : *On appelle variable aléatoire, une fonction qui a tout événement élémentaire d'un univers $\Omega = \{e_1; e_2; ...; e_n\}$ lui associe un nombre réel x_i.*
On note $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_p\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

C'est à dire $\boxed{\begin{array}{l} X : \{PP; PF; FP; FF\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad e_i \qquad\qquad \longmapsto x_i \end{array}}$

Dans l'exemple :
Soit X la variable aléatoire qui à chaque issue de Ω associe le gain (ou la perte).
à l'issue $\{PP\}$ on associe la valeur $X = 10$.
à l'issue $\{PF\}$ on associe la valeur $X = 3$.
à l'issue $\{FP\}$ on associe la valeur $X = 3$.
à l'issue $\{FF\}$ on associe la valeur $X = -4$.

On peut résumer celà dans un tableau :

éventualité(e_i)	PP	PF	FP	FF
x_i	10	3	3	-4

2) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition : *Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et p une loi de probabilité sur Ω.*
On appelle $x_1, x_2, ...x_p$ les valeurs prises par X.
La loi de probabilité p_X de X est la fonction qui, à chacune des valeurs prises par X fait correspondre la probabilité de l'événement "$X = x_i$".

On note : $\boxed{\begin{array}{l} p_X : X(\Omega) \longrightarrow [0; 1] \\ \qquad\quad x_i \longmapsto p_X(x_i) = p("X = x_i"). \end{array}}$

Dans l'exemple, on obtient :

gain x_i	-4	3	10
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Avec ce jeu, le gain moyen que l'on peut espérer est : $-4 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{4} = 3$.
Celà signifie que si on joue un très grand nombre de fois, (une infinité ...), on peut remportera en moyenne 3€ par partie.

3) Espérance et écart type d'une variable aléatoire

Définition : *Pour une variable aléatoire X pouvant prendre les valeurs x_1, x_2, ..., x_m, avec les probabilités $p_1 = p(X = x_1)$, $p_2 = p(X = x_2)$, ..., $p_3 = p(X = x_m)$, on appelle*

- *l'* **espérance** *mathématique de X :* $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
- *la* **variance** *:* $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[x_i - E(X)\right]^2$ *et l'***écart-type** *:* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Vocabulaire : on dira qu'un jeu est équitable quand $E(X) = 0$.

Exercice 1 : La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$0,1$	$0,2$	$0,25$	$0,05$		$0,15$

Calculer $p(X > 0)$, puis l'espérance mathématique de X, ainsi que son écart-type.

Exercice 2 : La mise de départ d'un jeu est de 2€. On lance ensuite un dé non truqué puis :

— si on obtient un 6, on gagne 5 €;

— si on obtient un 1 ou un 3, la mise est remboursée;

— dans les autres cas, on ne gagne rien.

La variable X désigne le gain du joueur. Déterminer la loi de probabilité de X puis son espérance. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 3 : Lors d'un examen, un élève doit répondre à un QCM. Ce QCM comporte trois questions et, pour chaque question, trois réponses différentes sont proposées, dont une seule est exacte. Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une note totale négative est ramenée à 0.

1. Représenter toutes les issues possibles à l'aide d'un arbre.

   On appelle X le total des points que l'élève a obtenu pour cet exercice.

2. Déterminer les différentes valeurs prises par X, la loi de probabilité de X et calculer son espérance.
3. Ce sujet a été donné à 650 élèves qui ne connaissaient absolument pas le sujet, et qui ont donc tous répondu au hasard. A quelle moyenne des points peut-on s'attendre approximativement ?

II - Loi binomiale

1) Rappels

Définition : *On dit que deux événements A et B d'un même univers Ω sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$*

2) Variables aléatoires indépendantes

Définition : *Soit Ω un univers et p une loi de proba sur Ω.*
On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour toutes les valeurs x_i prises par X et pour toutes les valeurs y_j prises par Y on a :
$p(X = x_i \; et Y = y_j) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$.

Remarque : celà revient à dire que les événements "$X = x_i$" et "$Y = y_j$" sont indépendants.

3) Expériences indépendantes :"avec remise"$\neq$ "sans remise"

Définition : *Lors de la répétition d'expériences aléatoires, on dira qu'elles sont indépendantes ssi le résultat de l'une n'a aucune influence sur le résultat de l'autre et ainsi de suite.*

Exemple : tirage avec remise : indépendance des expériences
tirage sans remise : pas d'indépendance donc probabilités conditionnelles.

Propriété : *Lors de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chacun des résultats.*

Exemple : On lance un dé équilibré puis on tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Alors $p(\{Face2\} \cap \{As\}) = p(\{Face2\}) \times p(\{As\})$.

Remarque : souvent on répétera la même expérience de manière indépendante.

Exemple : On lance 10 fois du suite une pièce de monnaie bien équilibrée et on regarde la face obtenue.
Alors la probabilité d'obtenir 10 fois pile est :
$p(\text{"}obtenir\ 10\ fois\ pile\text{"})$
$= p(\text{"}pile1\text{"} \cap \text{"}pile2\text{"} \cap .... \cap \text{"}pile10\text{"})$
$= p(\text{"}pile1\text{"}) \times p(\text{"}pile2\text{"}) \times ... \times p(\text{"}pile10\text{"})$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

4) Expérience de Bernoulli

Définition : *On appelle expérience de Bernouilli, une expérience aléatoire ayant deux issues.*
Dans ce cas on choisira pour l'une "succès" (S) et donc pour l'autre "echec"($E = \overline{S}$).
On notera p la probabilité de S et donc $p(E) = 1 - p$. p sera appelé paramètre de la loi de Bernouilli

Exemple : On lance un dé cubique et on regarde si le résultat est 5 (succès) ou non. Dans ce cas , $p = p(5) = 1/6$.
Illustration :

5) Loi Binomiale

Définition : *On répète n fois, de manière indépendante, une expérience de Bernoulli de paramètre p.*
Soit X la variable aléatoire qui a chaque groupe de n expériences lui associe le nombre de succès (On dira que X "compte" le nombre de succès).
Les valeurs prises par X sont donc : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3.....; n\}$.
On appelle loi Binomiale, notée $B(n,p)$ la loi de probabilité suivie par X.
Elle vérifie : $\forall k$ entier entre 0 et n, $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Illustration à l'aide d'un schéma de Bernoulli

Exemple :

On lance 10 fois un dé cubique bien équilibré. Soit Y la V.A qui compte le nombre de 5 obtenus.

1) Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 3 fois la face 5.

2) Déterminer la probabilité d'obtenir au moins 1 fois 5.