La fonction exponentielle

I - Définition et propriété fondamentale

1) Définition

Définition : *On dit qu'une fonction f, dérivable sur un intervalle I, est solution de l'équation différentielle $f' = kf$ sur I, si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = kf(x)$.*
Résoudre cette équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions solutions de cette équation.

Remarque : en physique , on note $\frac{dy}{dx} = ky$.

Théorème : *(Admis) existence :*
il existe une (au moins) fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E) : $f' = f$ et vérifiant : $f(0) = 1$.

Propriété : *si f est une solution de (E), alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.*

Démonstration : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)f'(x)$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ ... □

Théorème : *unicité*
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle et noté exp.

Démonstration : Soit f et g deux fonctions solutions de (E) alors : $f' = f$, $f(0) = 1$, $g' = g$ et $g(0) = 1$. On va montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.
□

2) propriétés fondamentales

Théorème : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *et* $\forall p \in \mathbb{Z}$,

$$1)\ exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}\ .$$
$$2)\ exp(x+y) = exp(x) \times exp(y).$$
$$3)\ exp(x-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}.$$
$$4)\ exp(px) = [exp(x)]^p.$$

<u>Démonstration :</u> 1)évident d'après prop
2) on dérive $h_a(x) = exp(x+a)exp(-x)$ on trouve 0...

3) 2) en remplaçant y par $(-y)$ puis 1).
4) par récurrence ou admis

□

Ex 1,2,3,4 p 181
Ex 37,38,39,40 p 190

3) Nombre e et notation "puissance" :

On note e le nombre $exp(1) \approx 2,718$. Donc $\forall p \in \mathbb{Z}$, $exp(p) = exp(p \times 1) = [exp(1)]^p = e^p$.

Théorème : *(admis)*$\forall x \in \mathbb{R}$, $exp(x) = e^x$.

<u>Conséquences :</u> en utilisant cette notation on peut réécrire les propriétés fondamentales :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \forall p \in \mathbb{Z}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}\ , \quad e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad e^{px} = [e^x]^p.}$$

<u>Exemple :</u>

Ex 43,44,45,46,47 p 191
Ex 49,50,52 p 191
Ex 88,89,90,91,93 p 194 Ex 94,95,96,97 p 195

II - Étude de la fonction exponentielle : $x \mapsto e^x$

1) Sens de variation et signe :

2) Dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$:

Ex 6,7,8,9 p 185
57,59,60,61,62,63à 68 p 193
69 à 79 p 193
103,104,105 p 197
110,112 p 197
114,118,119,121,122 p 199
125p200
+ Bilan 1 à 5 p 207