Suites numériques : 2ème partie

I - Suites arithmétiques

1. Définition et propriétes de base

Définition *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$.*
r est appelée la ***raison*** *de la suite.*

Remarque : On dit que l'on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre.

Exemple :

a) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 1$.
Alors, $u_1 = \ \ldots$, $u_2 = \ \ldots$, $u_3 = \ \ldots$.
(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ \ldots$.

b) Soit (v_n) la suite définie par la relation $v_n = 5n + 2$.

Alors, pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = \ldots$.

On en déduit que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ \ldots$

c) La suite (w_n) définie par la relation $w_n = n^2 + 2$ est-elle arithmétique ?

Propriété *(Admise)*
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors,
pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$.

Remarque :
si la suite commence au rang 1 et non au rang 0, alors on a : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

De manière générale, on a :

Propriété *(Admise)*
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors, quels que soient les entiers q et p, $u_q = u_p + (q-p)r$.

Exemple :

1) Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 2$.
Calculer u_{3002}.

2) Soit la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_2 = 1200$ et de raison $r = -10$. Calculer v_{25}. A partir de quel rang la suite est-elle négative ?

3) Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_{10} = -70$ et $u_{25} = 80$.
Calculer la raison r de cette suite, puis calculer u_0 et u_{1212}.

Propriété *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors,*
- si $r > 0$, alors (u_n) est croissante
- si $r = 0$, alors (u_n) est constante
- si $r < 0$, alors (u_n) est décroissante

2. Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite, on cherche à calculer la somme des termes $S_n = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n$.

Cette somme contient : $\boxed{}$ termes.

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{N}^*$ une suite ou la somme des termes : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$.

Cette somme contient : $\boxed{}$ termes.

Propriété *La somme des n premiers entiers naturels est : $S_n = 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Démonstration :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\ S_n & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

La somme contient $\dots$ termes, et donc on trouve ainsi, $2S_n = \dots$, soit $S_n = \dots$

Propriété *(Admise)*

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne des termes extrêmes :

$S_n = (n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$

$$S_n = (\text{nombre de termes})\frac{(1er\ terme\ de\ la\ somme) + (dernier\ terme\ de\ la\ somme)}{2}$$

Exemple :

II - Suites géométriques

1. définition et propriétes de base

Définition *Une suite géométrique est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant par la même quantité q , appelée* **raison** *de la suite, le terme précédent.*
Il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = q \times u_n$
Si on a prouvé au préalable que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ alors on peut utiliser :$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$

Exemples : • La suite de nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...des puissances successives de 2 est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.

• la suite (v_n) de terme général $v_n = (-1)^n$, pour laquelle $v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_2 = 1$, $v_3 = -1$, ...est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = -1$.

• Soit la suite (w_n) définie par la relation $w_n = 2 \times 3^n$.

Alors, pour tout entier n, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dots$

On en déduit que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \dots$

Propriété *Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, alors, pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n$.*
Si (v_n) commence à v_1 alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

Exemple :

a) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0,2$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$.
Calculer u_4 et u_{20}.

b) On utilise une feuille de papier, d'épaisseur $e = 0,5$ mm, que l'on replie successivement en deux. Quelle est l'épaisseur de la feuille après le premier pliage ? après le deuxième ? après le $n^{\text{ème}}$?
Combien de fois faudrait-il replier cette feuille en deux pour obtenir une épaisseur supérieure à la hauteur de la tour Eiffel (environ 300 m) ?

Propriété *Soit (u_n) une suite géométrique, dont tous les termes sont non nuls, de raison $q \neq 0$, alors, pour tous entiers m et p, $\dfrac{u_m}{u_p} = q^{m-p}$*

2. Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété *Pour tout réel $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.*
Pour $q = 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$.

Propriété *La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique, de premier terme a et de raison q est : $a\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.*

A retenir : cette somme =(1er terme de la somme) $\times \dfrac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$

Exercice 1: Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

On définit la suite (v_n) à partir de (u_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$.

1) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
2) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 2: Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4-u_n}$.

On définit la suite (v_n) à partir de la suite (u_n) par la relation $v_n = \dfrac{3u_n+2}{u_n}$.

1) Montrer que (v_n) est arithmétique.
2) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 3: (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}$, et (v_n) est définie par $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.

1) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3 et conjecturer la nature de la suite (v_n).
2) Prouver que la suite (v_n) est géométrique.
3) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 4: Calculer les sommes :

a) $S = 1+2+4+8+16+\cdots+1024$ b) $P = 3+5+7+9+\cdots+121$ c) $Q = 2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32}$

Exercice 5: Résoudre les équations :

a) $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^7=0$ b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\cdots+\dfrac{1}{x^8}=0$ c) $27x^7+9x^5+3x^3+x=0$

Exercice 6: Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n + 4n - 3$.
On note (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = 3^n$ et $w_n = 4n-3$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et que (w_n) est une suite arithmétique
b) Calculer $V_n = v_0+v_1+\cdots+v_n$ et $W_n = w_0+w_1+\cdots+w_n$.
c) En déduire la somme, en fonction de n, $U_n = u_0+u_1+\cdots+u_n$.

Exercice 7: Soit (u_n) la suite définie par les deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$.

1) a) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est géométrique.
   b) Exprimer alors v_n en fonction de n.
2) a) Calculer en fonction de n la somme $S_n = 0,5+(0,5)^2+(0,5)^3+\cdots+(0,5)^n$.
   b) Exprimer alors u_n en fonction de n.