Lois continues - Exercices

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $I = [0;1]$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction f définie par $f(x) = 4x^3$.

1. Vérifier que la fonction f définie bien une loi de probabilité.
2. Calculer la probabilité $P(0,3 \leqslant X \leqslant 0,6)$.

Exercice 2 Y est une variable aléatoire à valeurs dans $[0;+\infty[$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction définie par $f(x) = 2e^{-2x}$.

1. Vérifier que la fonction f définie bien une loi de probabilité.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(n \leqslant Y \leqslant n+1)$.
3. Soit $m \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité que Y soit inférieure à m.
4. Soit p et q deux entiers naturels, $p \leqslant q$, déterminer la probabilité $P_{(Y\leqslant q)}(Y \leqslant p)$.

Exercice 3 Soit Z la variable aléatoire à valeurs dans $[-10;10]$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3}{2000}x^2$.

1. Vérifier que la fonction f définie bien une loi de probabilité.
2. Calculer l'espérance de la variale aléatoire Z.
3. Déterminer le nombre réel a tel que $P(-a \leqslant Z \leqslant a) = 0,95$.

Exercice 4 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $I = [-2;2]$.

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité de X.
2. Calculer $P(X < 1)$ et $P(X \geqslant 1,5)$.
3. Calculer $P_{(X>0)}(X < 1)$.
4. Donner l'espérance de X.

Exercice 5 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $9x^2 - 33x + 10 > 0$.

2. On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[0;2]$.
   a) Quelle est la probabilité que ce nombre soit solution de l'inéquation $9x^2 - 33x + 10 > 0$?
   b) Quelle est la probabilité que ce nombre soit solution de l'équation $9x^2 - 33x + 10 = 0$.

Exercice 6 Je n'ai pas de monnaie pour payer le parking où ma voiture est stationnée.

Les agents municipaux passent aléatoirement une fois par jour durant les heures de stationnement payant de 9h à 19h.

Je compte laisser ma voiture là pendant 2h. Quelle est la probabilité que je sois verbalisé ?

Exercice 7 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

1. Déterminer $E(X)$, et interpréter cette valeur par une phrase.
2. Quel est le rôle de l'algorithme ci-contre ?

   Quel résultat, approximativement, s'affichera en sortie de cet algorithme ?

   Traduire cet algorithme dans un langage (calculatrice par exemple) et le faire fonctionner.
3. Modifier cet algorithme pour qu'il calcule une valeur approchée de la moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.

Initialisation
  S prend la valeur 0
  i prend la valeur 0
Traitement
  Tant que $i < 1000$
    x prend une valeur aléatoire dans $[0;1[$
    S prend la valeur $S + x$
    i prend la valeur $i + 1$
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher $S/1000$

 Exercice 8 Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10$.

1. Déterminer la probabilité $P\left(0 \leqslant X \leqslant 10\right)$.
2. Soit a et b deux réels, $a \leqslant b$, déterminer la probabilité $P\left(a \leqslant X \leqslant b\right)$.
3. Déterminer la probabilité $P\left(X \geqslant 10\right)$.
4. a) Déterminer deux réels α et β tels que la fonction G définie par $G(x) = \left(\alpha x + \beta\right) e^{-10x}$ soit une primitive de $g(x) = 10xe^{-10x}$.
   b) En déduire l'espérance de X.

Exercice 9 *Loi de durée de vie sans viellissement*

La durée de vie d'un produit est une variable aléatoire T à valeurs dans $[0; +\infty[$.
L'événement $(T \geqslant t)$ désigne l'événement : "L'élément est encore en vie à l'instant t".
On suppose que T suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ.

On dit que T suit une loi de durée de vie sans viellissement si la probabilité que l'élément soit encore en vie à l'instant $t + h$ sachant qu'il est en vie à l'instant t ne dépend que de la durée h (et donc pas de l'instant t).

Montrer que T suit une loi de durée de vie sans viellissement.

Remarque : Par exemple, lors de la désintégration radioactive, le durée de vie d'un noyau est une loi sans viellissement.

Exercice 10 La durée de vie de certaines ampoules peut-être modélisée par une loi exponentielle. Ces ampoules ont une durée de vie de 800 heures.

1. Déterminer le paramètre de cette loi et donner la densité de probabilité associée.
2. Calculer la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard ait une durée de vie supérieure à 1000 heures.
3. Sachant que l'ampoule à mon plafond fonctionne depuis déjà 1000 heures, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 100 heures ?
4. Une ampoule provenant du même stock brille depuis déjà 10 000 heures. Quelle est la probabilité qu'elle continue de briller pendant encore 100 heures de plus ?

Exercice 11 Le temps d'attente à une caisse a été estimé statistiquement dans un grand magasin.

En notant Y la variable aléatoire, à valeurs dans $[0; +\infty[$, égale au temps d'attente en minutes, d'un client à cette caisse, on modélise la loi de probabilité de Y par une loi exponentielle.

1. On a estimé que la probabilité qu'un client attende plus de 10 minutes à cette caisse est de $0,13$.
   Déterminer le paramètre de la loi exponentielle.
2. Déterminer la probabilité qu'un client attende moins de 10 minutes à cette caisse.
3. Déterminer le temps moyen d'attente à cette caisse.
4. J'attend déjà depuis 5 minutes à cette caisse. Quelle est la probabilité que je passe à la caisse dans plus de 5 minutes ?
   La caisse d'à côté m'a l'air bien plus rapide. Quelle est la probabilité pour que je passe à la caisse d'à côté dans plus de 5 minutes. Ai-je intérêt à changer de file d'attente ?
   (On suppose que les temps d'attente à toutes les caisses de ce magasin sont modélisés par la même loi).

Exercice 12 *D'après Bac*

Dans un magasin, des composants, en apparence tous identiques, peuvent présenter certains défauts. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans ce magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise.

On appelle X le nombre de composants défectueux achetés.

J'achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Arrondir au dix-millième.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Arrondir au dix-millième.
3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5.10^{-4}$.

On suppose aussi que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieur à 1000 heures (on donnera la valeur exacte et arrondie au centième) :
   a) si ce composant est défectueux ;
   b) si ce composant n'est pas défectueux.
2. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant non défectueux soit supérieure à 2000 heures sachant qu'il fonctionne encore parfaitement après 1500 heures d'utilisation.
3. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.

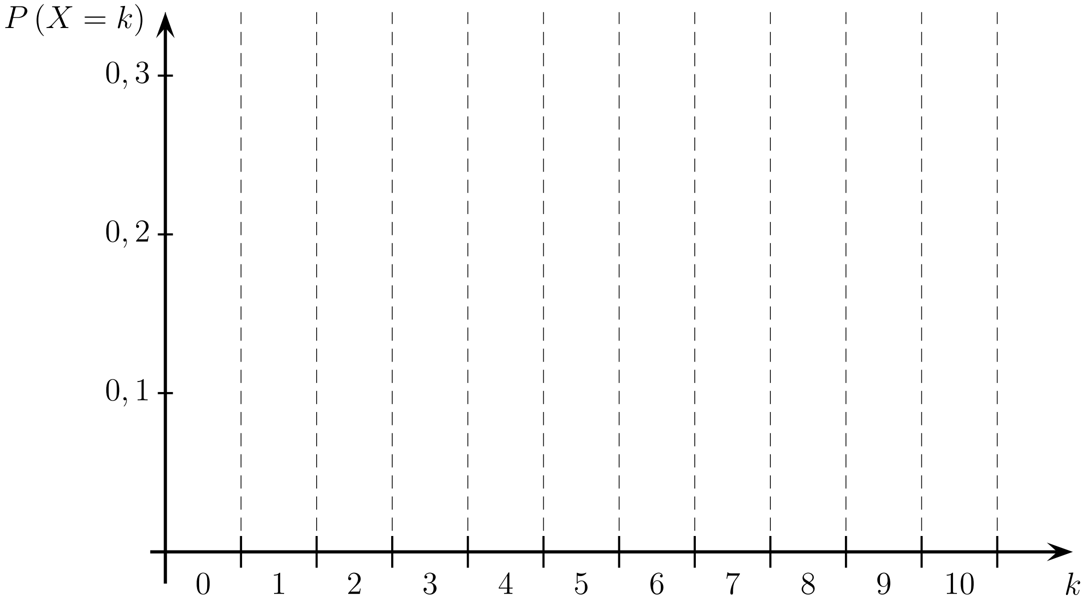
   Démontrer que la probabilité que ce composant soit en état de marche après t heures de fonctionnement est : $P(T > t) = 0,02e^{-5.10^{-4}t} + 0,98e^{-10^{-4}t}$.
4. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

Exercice 13 On lance 10 fois de suite un dé bien équilibré à six faces.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où les chiffres 2 ou 3 sont apparus.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser son espérance et son écart-type.
2. Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X et l'histogramme suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$											



Lois normales

Exercice 14 Soit X une v.a. suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

Calculer, à l'aide de la table des valeurs de Π et de la calculatrice, les probabilités :

a) $p_1 = P(X \leqslant 0,43)$ b) $p_2 = P(X \leqslant 1,38)$ c) $p_3 = P(0,43 \leqslant X \leqslant 1,38)$

d) $p_4 = P(X \leqslant -0,96)$ e) $p_5 = P(-1,1 \leqslant X \leqslant 2,57)$ f) $p_6 = P(-1,5 \leqslant X \leqslant 1,5)$

g) $p_7 = P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$ h) $p_8 = P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96)$ i) $p_9 = P(0 \leqslant X \leqslant 1,96)$

Exercice 15 Soit $\alpha = 0,05$ et X une v.a. suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

Déterminer le nombre v_α tel que : $P(X \leqslant v_\alpha) = 1-\alpha$.

Exercice 16 Soit X une v.a. qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$.
Déterminer, à l'aide de la table de valeurs de Π et de la calculatrice, les valeurs de u et v telles que :

a) $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 0,95$ b) $P(-v \leqslant X \leqslant v) = 0,99$

Exercice 17 On lance 3600 fois un dé équilibré. On souhaite évaluer la probabilité que le nombre d'apparition du 6 soit compris strictement entre 575 et 650.

On note X la v.a. égale au nombre d'apparitions du 6 lors de ces 3600 lancers.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier.
2. Appliquer, en justifiant son utilisation, le théorème de Moivre-Laplace à la v.a. X.
3. En déduire une valeur approchée de la probabilité recherchée.

Exercice 18 Soit X une v.a. suivant la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ avec $\mu = 80$ et $\sigma = 5$.

Calculer les porbabilités $P(X \leqslant 84)$, $P(X \leqslant 76)$ et $P(75 \leqslant X \leqslant 85)$ à l'aide de la calculatrice, puis à l'aide de la table des valeurs de $\Pi(x)$.

Exercice 19 Une usine de composants électroniques fabrique des résistances. En mesurant un grand échantillon de ces composants, on constate que la résistance nominale, exprimée en ohms, de chaque composant tiré au hasard est une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(1000;100)$.

Pour cet exercice, on utilisera uniquement les trois résultats suivants pour une variable U suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$: $P(-1,96 \leqslant U \leqslant 1,96) = 0,95$, $P(-1,64 \leqslant U \leqslant 1,64) = 0,9$, $P(U \leqslant 1) = 0,84$.

Vrai ou Faux ?

1. La probabilité que la résistance d'un composant tiré au hasard soit comprise entre 980 Ω et 1020 Ω est supérieure à 0,95.
2. La probabilité que la résistance d'un composant soit comprise entre 991 Ω et 1009 Ω est supérieure à 0,9.
3. La probabilité que la résistance d'un composant soit supérieure à 983,6 Ω est supérieure à 0,97.
4. La probabilité que la résistance d'un composant soit comprise entre 990 Ω et 1010 Ω est égale à 0,84.
5. La probabilité que la résistance d'un composant soit comprise entre 983,6 Ω et 1019,6 Ω est égale à 0,925.

Exercice 20 Soit X une v.a. suivant la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. On sait de plus que l'écart-type de X vaut $0,1$ et que $P\left(X \leqslant 0\right) = 0,5478$. Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 21 La durée de vie d'une clé USB, exprimée en mois, est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Selon le fabricant, 75 % des clés produites ont une durée de vie comprise entre 15 et 25 mois. La garantie s'applique sur cette période en considérant que 5 % des clés de la production ont une durée de vie inférieure à 15 mois.

1. Déterminer la moyenne et l'écart-type de la loi.
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 25 et 30 mois ?