Exercice fluctuation et estimation 2^{nde}

Exercice 1 **5 points**

Les probabilités demandées seront arrondies à 0,01.

Un commerçant vient de s'équiper d'un distributeur de glaces à l'italienne.

1. La durée, en mois, de fonctionnement sans panne de son distributeur de glaces à l'italienne est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif (on rappelle que la fonction f de densité de la loi exponentielle est donnée sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

   Le vendeur de l'appareil assure que la durée moyenne de fonctionnement sans panne de ce type de distributeur, c'est-à-dire l'espérance mathématique de X, est de 10 mois.

   (a) Justifier que $\lambda = 0,1$.

   (b) Calculer la probabilité que le distributeur de glaces à l'italienne n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois.

   (c) Sachant que le distributeur n'a connu aucune panne pendant les six premiers mois, quelle est la probabilité qu'il n'en connaisse aucune jusqu'à la fin de la première année ? Justifier.

   (d) Le commerçant remplacera son distributeur de glaces à l'italienne au bout d'un temps t, exprimé en mois, qui vérifie que la probabilité de l'évènement $(X > t)$ est égale à $0,05$. Déterminer la valeur de t arrondie à l'entier.

2. La notice du distributeur de glaces précise que le distributeur fournit des glaces à l'italienne dont la masse est comprise entre 55 g et 65 g.

   On considère la variable aléatoire M représentant la masse, en grammes, d'une glace distribuée. On admet que M suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart-type $2,5$.

   (a) Calculer la probabilité que la masse d'une glace à l'italienne choisie au hasard parmi celles distribuées soit comprise entre 55 g et 65 g.

   (b) Déterminer la plus grande valeur de m, arrondie au gramme près, telle que la probabilité $P(M \geqslant m)$ soit supérieure ou égale à $0,99$.

3. Le distributeur de glaces à l'italienne permet de choisir un seul des deux parfums : vanille ou fraise. Pour mieux gérer ses achats de matières premières, le commerçant fait l'hypothèse qu'il y aura en proportion deux acheteurs de glace à la vanille pour un acheteur de glace à la fraise. Le premier jour d'utilisation de son distributeur, il constate que sur 120 consommateurs, 65 ont choisi de la glace à la vanille.

   Pour quelle raison mathématique pourrait-il mettre en doute son hypothèse ? Justifier.

Exercice 2 **5 points**

Dans cet exercice et sauf mention contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Une usine fabrique des tubes.

Partie A

Les questions **1.** *et* **2.** *sont indépendantes.*

On s'intéresse à deux types de tubes, appelés tubes de type 1 et tubes de type 2.

1. Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre $1,35$ millimètre et $1,65$ millimètre.
   (a) On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $1,5$ et d'écart-type $0,07$.

   On prélève au hasard un tube de type 1 dans la production de la journée. Calculer la probabilité que le tube soit accepté au contrôle.

   (b) L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes de type 1. Pour cela, on modifie le réglage des machines produisant ces tubes. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé dans la production issue de la machine modifiée, associe son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance $1,5$ et d'écart-type σ_1.

   Un tube de type 1 est prélevé au hasard dans la production issue de la machine modifiée. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_1 pour que la probabilité que ce tube soit accepté au contrôle soit égale à 0,98. (On pourra utiliser la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X_1 - 1,5}{\sigma_1}$ qui suit la loi normale centrée réduite.)

2. Une machine produit des tubes de type 2. Un tube de type 2 est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci, en millimètres, appartient à l'intervalle $[298\ ;\ 302]$. Le cahier des charges établit que, dans la production de tubes de type 2, une proportion de $2\,\%$ de tubes non « conformes pour la longueur » est acceptable.

   On souhaite décider si la machine de production doit être révisée. Pour cela, on prélève au hasard dans la production de tubes de type 2 un échantillon de 250 tubes dans lequel 10 tubes se révèlent être non « conformes pour la longueur ».

   (a) Donner un intervalle de fluctuation asymptotique à $95\,\%$ de la fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » dans un échantillon de 250 tubes.

   (b) Décide-t-on de réviser la machine ? Justifier la réponse.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats au **millième**.

Partie A

En France, la consommation de produits bio croît depuis plusieurs années.

En 2017, le pays comptait $52\,\%$ de femmes. Cette même année, $92\,\%$ des Français avaient déjà consommé des produits bio. De plus, parmi les consommateurs de produits bio, $55\,\%$ étaient des femmes.

On choisit au hasard une personne dans le fichier des Français de 2017. On note :

- F l'évènement « la personne choisie est une femme » ;

- H l'évènement « la personne choisie est un homme » ;
- B l'évènement « la personne choisie a déjà consommé des produits bio ».

1. Traduire les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements F et B.
2. (a) Montrer que $P(F \cap B) = 0,506$.

   (b) En déduire la probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme.
3. Calculer $P_H\left(\overline{B}\right)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans un supermarché, un chef de rayon souhaite développer l'offre de produits bio.
Afin de justifier sa démarche, il affirme à son responsable que 75 % des clients achètent des produits bio au moins une fois par mois.
Le responsable souhaite vérifier ses dires. Pour cela, il organise un sondage à la sortie du magasin. Sur 2000 personnes interrogées, 1421 répondent qu'elles consomment des produits bio au moins une fois par mois.
Au seuil de 95 %, que peut-on penser de l'affirmation du chef de rayon ?

Partie C

Pour promouvoir les produits bio de son enseigne, le responsable d'un magasin décide d'organiser un jeu qui consiste, pour un client, à remplir un panier avec une certaine masse d'abricots issus de l'agriculture biologique. Il est annoncé que le client gagne le contenu du panier si la masse d'abricots déposés est comprise entre 3, 2 et 3, 5 kilogrammes.
La masse de fruits en kg, mis dans le panier par les clients, peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi de probabilité de densité f définie sur l'intervalle $[3\,;\,4]$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-2)^2}.$$

Rappel : on appelle fonction de densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ toute fonction f définie, continue et positive sur $[a\ ;\ b]$, telle que l'intégrale de f sur $[a\ ;\ b]$ est égale à 1.

1. Vérifier que la fonction f précédemment définie est bien une fonction de densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle $[3\,;\,4]$.
2. Le magasin annonce : « Un client sur trois gagne le panier ! ».
   Cette annonce est-elle exacte ?
3. Cette question a pour but de calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
   On rappelle que, pour une variable aléatoire X de densité f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, $\mathrm{E}(X)$ est donnée par : $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$.

   (a) Vérifier que la fonction G, définie sur l'intervalle $[3\,;\,4]$ par $G(x) = \ln(x-2) - \dfrac{x}{x-2}$, est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{(x-2)^2}$ sur cet intervalle.

   (b) En déduire la valeur exacte de $\mathrm{E}(X)$, puis sa valeur arrondie au centième.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.