Intégration - Exercices

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^1 x\,dx$, $J = \displaystyle\int_1^3 (2t+1)\,dt$, et $K = \displaystyle\int_{-2}^3 |x|\,dx$.

Exercice 2 Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^4 E(x)\,dx$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 4x - 3$.
Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t \geq 1$, la fonction $F(t) = \displaystyle\int_1^t f(x)\,dx$.

Exercice 4

a) Démontrer que pour tout réel t de $[0;1]$, on a $\dfrac{t}{1+t^2} \leq t$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 5 f est la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

a) Etudier les variations de f sur $[1;2]$.

b) Démontrer que pour tout x de $[1;2]$, $\quad \dfrac{e^2}{4} \leqslant \dfrac{e^x}{x^2} \leqslant e$.

c) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x^2}\,dx$.

Exercice 6 Soit f définie sur $[-3;3]$ par $f(x) = E(x^2)$ où E désigne la fonction partie entière.

1. Montrer que f est une fonction paire, et tracer sa représentation graphique sur l'intervalle $[0;3]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$. En déduire $\displaystyle\int_{-3}^3 f(x)\,dx$.

Exercice 7 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- $f(x) = 3x^2 + x - 6$
- $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$
- $h(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$
- $k(x) = 2x + \sin(x)$

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $I = [0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur I par $F(x) = \dfrac{3x^2+4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.
2. La fonction G définie sur I par $G(x) = \dfrac{3x^2-x-5}{x+1}$ est-elle une autre primitive de f sur I ?

Exercice 9 Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$ telle que $F(1) = 0$.

Exercice 10 Déterminer la primitive G de $g : x \mapsto 12x^5 - 9x^2 + 6x - 3$ telle que $G(0) = 4$.

Exercice 11 Déterminer la primitive H de $h : x \mapsto \dfrac{4}{(2x+1)^2}$ telle que $H\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$.

Exercice 12 Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.
Déterminer le sens de variation de F.

Exercice 13 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + \dfrac{7}{3}x + 2$ b) $f(x) = -\sin(x) + 2\cos(x)$ c) $f(x) = 2x - 4 + \dfrac{3}{x^2}$

Exercice 14 Déterminer les intégrales suivantes : a) $I = \displaystyle\int_0^1 x^2(x^3-1)^5\,dx$

b) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2}\,dx$ c) $K = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ d) $L_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}\,dx$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n$

Exercice 15

Dans un repère orthonormé, on considère le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

(On pourra se rappeler que $\sqrt{x} = x^{1/2}$*)*

Exercice 16 Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = (2-x)(x-1)$ sur $I = [-1;0]$ b) $g(x) = e^{-3x+1}$ sur $I = [-1;1]$.

Exercice 17 **Vrai-Faux** Pour chaque affirmation proposée, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Soit f une fonction continue et positive sur $[0;+\infty[$, et soit F et G les fonctions définies $[0;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ et $G(x) = x\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$. Soit de plus Γ la courbe représentative de f dans un repère.

1. $G(0) = G(1)$
2. G est dérivable sur $[0;+\infty[$, et pour tout $x \in [0;+\infty[$, $G'(x) = F(x) + xf(x)$.
3. On ne peut pas prévoir le sens de variation de G avec les seules informations de l'énoncé.
4. L'aire de la surface délimitée par les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et la courbe Γ se calcule par $F(2) + F(0)$.

Exercice 18 **D'après Bac**

Partie A - ROC On supposera connus les résultats suivants : u et v sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$.

— Si $u \geqslant 0$ sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,dx \geqslant 0$.

— Pour tous nombres α et β, $\displaystyle\int_a^b (\alpha u(x) + \beta v(x))\,dx = \alpha\int_a^b u(x)\,dx + \beta\int_a^b v(x)\,dx$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$ et si, pour tout nombre réel $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)$.

Partie B - Etude d'une suite On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 1, \quad u_n = \int_0^1 x^n\,f(x)\,dx$$

1. a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $\dfrac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   b) En déduire que $\dfrac{1}{e} \leqslant u_0 \leqslant 1$.

2. Calculer u_1.
3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\quad 0 \leqslant u_n$.

   b) Etudier les variations de la suite (u_n).

   En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\quad u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 19 **D'après Bac**

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t} \sqrt{1+t}\, dt\,.$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. Dans cette question, *toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par : $\quad I_n = \displaystyle\int_1^n (t+1)\, e^{-t}\, dt.$

   a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

   b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

   c) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $t \mapsto (at+b)e^{-t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto (t+1)e^{-t}$.

   Exprimer alors I_n en fonction de n.

   d) En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel.

   e) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?