Lois continues

I - Rappels

Pour une expérience aléatoire dont le nombre d'issues est finis, on peut choisir comme univers $\Omega = \{\omega 1; \omega 2; ...; \omega n\}$ (ensemble discret).
Dans ce cas,
–>si les ωi ont la même chance de se produire, on peut choisir comme loi de probabilité, la loi d'équiprobabilité.
–> si il n'y a que 2 issues, on peut utiliser l'expérience de Bernoulli
–> où .... beaucoup d'autres lois de probabilités
–> où si on répète une expérience de Bernouilli :
La loi binomiale : pour tout entier k compris entre 1 et n, $p_X(k) = p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
Dans ce cas, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
–> beaucoup d'autres modèles probabilistes existent

Et si le nombre d'éventualités n'est pas finis ? Et si le cardinal de l'univers était infini ?
Et si les valeurs de la variable aléatoire peuvent prendre toutes les valeurs d'un intervalle I ?

Etudions donc les variables aléatoires X dont la loi de probabilité P_X est déterminée par une fonction f, continue sur I.

II - Densité et loi de probabilité sur un intervalle

Définition : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
On appelle "densité de probabilité" sur I, toute fonction f définie sur I et vérifiant les trois conditions suivantes :
- f est continue sur I.
- f est positive sur I $(\forall x \in I, f(x) \geq 0)$
- L'aire sous la courbe sur I est égale à 1UA(c'est à dire : $\int_I f(t)\,dt = 1$).

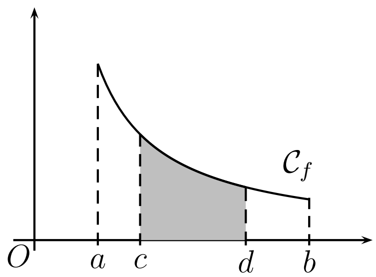
Définition : *On définit la "loi de probabilité p de densité f sur I" (ou loi continue sur I), en associant à tout intervalle $[\alpha;\beta] \subset I$, le réel : $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$*

C'est à dire : $\boxed{\begin{array}{llll} \{p : & I & \longrightarrow & [0;1] \\ & [\alpha;\beta] & \longmapsto & p([\alpha;\beta]) = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt \end{array}}$

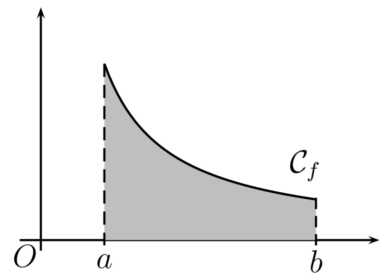
Remarque : Dans le cas où I n'est pas borné par exemple $I = [a; +\infty[$ on utilisera :
$p(X \in [\alpha; +\infty[) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_\alpha^\lambda f(t)\,dt$

Définition : *On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de probabilité p de densité f sur I ssi*

$$\forall \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}, \text{ avec } \alpha < \beta, \quad \boxed{p(X \in [\alpha;\beta]) = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt}$$



$P\left(c \leqslant X \leqslant d\right)$



$P\left(a \leqslant X \leqslant b\right) = 1$

Conséquences : Soit X une V.A de loi de probabilité p de densité f.
- $\forall x_0 \in I,\ p(X = x_0) = 0$
- $p(X > \alpha) = p(X \geq \alpha)$
- pour tout α et β, $\quad p(X \in]\alpha;\beta[) = p(X \in [\alpha;\beta])$

Remarques : Les propriétés des probabilités discrètes s'étendent au cas continu :

- Probabilité du complémentaire : $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$
- Probabilité conditionnelle : $P_{(X\in J)}\left(X \in J'\right) = \dfrac{P\left(X \in J' \cap J\right)}{P\left(X \in J\right)}$

Exemple : Soit X la V.A prenant ses valeurs dans $[1;+\infty[$ dont la loi de probabilité p sur $[1;+\infty[$ admet pour densité la fonction :

$$h : \begin{array}{rcl} [1;+\infty[& \longrightarrow & [0;1] \\ x \longmapsto & \frac{1}{x^2} & \end{array}$$

1. Justifier l'existence de p.
2. Calculer de deux façons différentes $p(X \leq 2)$

Ex 1,2 de la fiche
Ex 63, 64, 65 p 355

Définition : *Soit X une V.A continue sur $I = [a;b]$, dont la loi de probabilité est f.*

L'espérance de X est :	*La variance de X est :*	*L'écart type de X est*
$E(X) = \displaystyle\int_a^b x\,f(x)\,dx$	$V(X) = \displaystyle\int_a^b (x - E(X))^2 f(x)\,dx$	$\sigma(x) = \sqrt{V(X)}$

Propriété : *Soit X une V.A continue sur $I = [a;b]$, dont la loi de probabilité est f.*

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_a^b, x^2 f(x)\,dx - [E(X)]^2$$

Ex 3 de la fiche
Ex 68,69 p 356

III - Exemples de lois continues

1) La loi uniforme sur $[a;b]$

Définition : *Théorème -Définition*

- *On appelle* **loi uniforme** *sur $[a;b]$, la loi de probabilité continue sur $[a;b]$ dont la densité f est une fonction constante sur $[a;b]$.*

  On a donc : $\forall x \in [a;b]$, $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{b-a}}$

- *Pour cette loi, la probabilité de l'intervalle $[\alpha;\beta] \subset [a;b]$ est :* $\boxed{p([\alpha;\beta]) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}}$

Remarque : La loi uniforme est la loi de probabilité qui généralise la loi d'équiprobabilité dans le cas discret.

Démonstration : f est une fonction constante sur $[a;b]$, ...

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x =$$

$\square$

Propriété : *L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur $[a;b]$ est* $\boxed{E(X) = \dfrac{a+b}{2}}$.

Démonstration : La densité de probabilité est définie par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, et alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b t\,f(t)\,dt = \int_a^b t\,\frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b t\,dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{b-a}(b-a)(b+a) = \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

$\square$

Exemple : on considère Y la loi de probabilité uniforme sur $[-1;4]$.
Calculer $p(Y=\pi)$, $p(Y \in [0;4])$, $p(Y \in [-1;\pi])$ et $p(Y \in [2;7])$.

Ex 73, 74 p 356
Ex 4,5,6,7 fiche
Ex 75,76 p 357

2) Les lois exponentielles

La durée de vie d'un appareil peut être assimilée à une V.A prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Si on suppose que cette durée ne dépend pas de son temps de fonctionnement (On dit que la durée de vie est sans vieillissement), on peut démontrer que la loi de probabilité de cette V.A. admet pour densité une fonction $f$de la forme : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Définition : *Soit un réel $\lambda > 0$.*
On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi continue admettant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Propriété : *Soit X une V.A. qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.*
Soient α et β, $\alpha < \beta$, deux nombres réels de l'intervalle $[0; +\infty[$. Alors,
$p(X \in [\alpha; \beta]) = \int_\alpha^\beta \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_\alpha^\beta = ...$

Propriété : *L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ est :*

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}\ .$$

Démonstration :

$E(X) = \int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t\, f(t)\, dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t\, \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \right]_0^x =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} - (-\frac{1}{\lambda}) \right)_0^x = \frac{1}{\lambda}$

□

Propriété : *Soit X une V.A suivant la loi exponentielle de paramètre λ.*
X est sans vieillissement(ou sans mémoire), c'est à dire :
$\forall t > 0$ *et* $\forall h > 0, P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$
Réciproquement(admis), si une V.A. est sans vieillissement elle suit une loi exponentielle.

Démonstration : ... □

Exemple : On admet que les phénomènes d'attente peuvent se modéliser par une loi exponentielle.
Un magasin annonce que le temps d'attente moyen en caisse est de 5 min.

1. Que vaut le paramètre de la loi exponentielle ?
2. Quelle est la probabilité, dans ce magasin, que j'attende à la caisse :
   a) moins de 5 min ?
   b) entre 5 et 10 min ?
   c) plus de 15 min ?