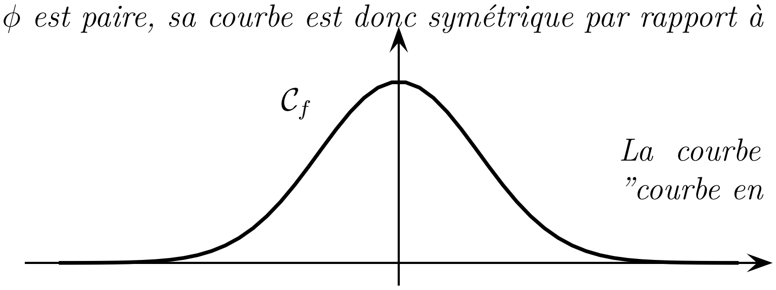
3) Lois normales

3).1 Loi normale centrée réduite

Définition : *-Propriété*
Dire qu'une variable aléatoire Z suit **la loi normale centrée réduite**, *notée $\mathcal{N}(0;1)$, signifie qu'elle admet pour densité de probabilité la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par :*
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Démonstration : ϕ est de manière évidente continue et positive sur $\mathbb{R}$.
Il faudrait également démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, dt = 1$. On l'admet en terminale. $\square$
Remarque : On dit centrée car $E(X) = 0$ et réduite car $\sigma(X) = 1$.

Propriété : *ϕ est paire, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

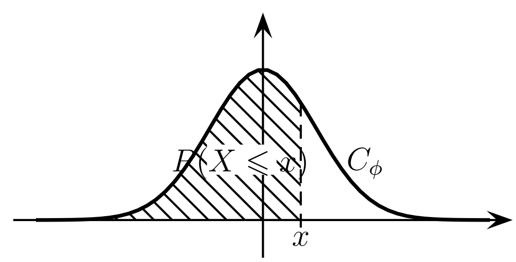


La courbe représentative de ϕ est dite "courbe en cloche" ou "courbe de gauss".

Remarque : On ne sait pas déterminer de primitive de ϕ, les calculs des probabilités seront donc effectués à la calculatrice.
Exemple :Soit X une V.A. qui suit $\mathcal{N}(0;1)$, calculer : $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx$
$P(-2 \leqslant X \leqslant 2) \approx$
$P(-3 \leqslant X \leqslant 3) \approx$ Ces valeurs sont à connaitre !

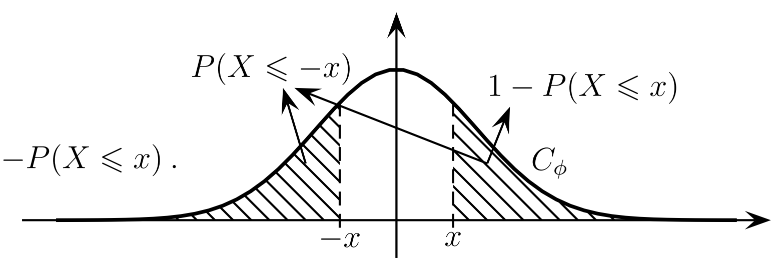
Illustration :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P\left(X \leqslant x\right) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\, dt = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{x} \phi(t)\, dt$$



Propriété :

$P(X \leqslant -x) = P(X < -x) = P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x)$.



Propriété : *Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, on a donc,*

$$P\left(X \leqslant 0\right) = P\left(X \geqslant 0\right) = 0,5$$

Pour tous $a \leqslant b$, $\quad P\left(a \leqslant X \leqslant b\right) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$.

Ex 40,41,43,44,48 p 396
Ex 49,50 p 397

Théorème :
- *L'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ est : $E(X)=0$.*
- *Sa variance est : $V(X)=1$ et donc son écart-type est : $\sigma(X)=\sqrt{V}=1$ (admis).*

Démonstration : Pour tout x réel, on a $f'(x)=-x\,f(x)$, et donc,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} t\,f(t)\,dt+\int_{0}^{+\infty} t\,f(t)\,dt$$

avec,

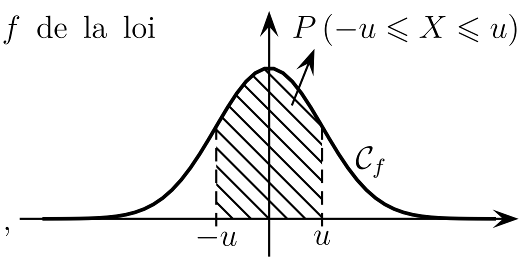
$$\int_{-\infty}^{0} t\,f(t)\,dt=\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{0} t\,f(t)\,dt=\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{0} -f'(t)\,dt=\lim_{x\to-\infty}\Big[-f(t)\Big]_{x}^{0}=\lim_{x\to-\infty}\Big(-f(0)+f(x)\Big)$$

or, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, et donc, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\,f(t)\,dt=-f(0)$.
De même, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\,f(t)\,dt=f(0)$, et donc, $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\,f(t)\,dt+\int_{0}^{+\infty} t\,f(t)\,dt=-f(0)+f(0)=0$.
$\square$

Propriété : *Soit T une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, alors, pour tout nombre réel $0<\alpha<1$, il existe un unique nombre réel $u_\alpha>0$ tel que*

$$P\left(-u_\alpha\leqslant T\leqslant u_\alpha\right)=1-\alpha\ .$$

Démonstration : Par symétrie de la densité de probabilité f de la loi normale centrée réduite, on a



$$\begin{aligned}P\left(-u\leqslant X\leqslant u\right)&=2\,P\left(0\leqslant X\leqslant u\right)\\&=2\int_0^u f(x)\,dx=2F(u)\ ,\end{aligned}$$

où F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

F est continue (et même dérivable) et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ car $F'=f$ et $f>0$.

De plus, $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}F(u)=\frac{1}{2}$: il s'agit de la moitié de l'aire sous la courbe de f qui est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et dont l'aire totale (de $-\infty$ à $+\infty$) vaut 1.

On a donc le tableau de variation de la fonction $2F$:

x	0	$+\infty$
$2F$	0 $\nearrow$	1

Comme pour tout nombre $\alpha\in]0;1[$, le nombre $1-\alpha\in]0;1[$, d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, $\exists!\ u_\alpha\in]0;+\infty[$ tel que $2F\left(u_\alpha\right)=1-\alpha$, c'est-à-dire tel que $P\left(-u_\alpha\leqslant X\leqslant u_\alpha\right)=1-\alpha$.

x	0	u_α	$+\infty$
$2F$	0 $\nearrow$	$1-\alpha$ $\nearrow$	1

$\square$

Propriété : *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, alors :*

- $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \simeq 1 - 0.05 = 0,95$ *donc* $u_{0,05} \simeq 1,96$.
- $P(-2,56 \leqslant X \leqslant 2,56) \simeq 1 - 0.01 = 0,99$ *donc* $u_{0,01} \simeq 2,56$.

3).2 Lois normales générales

Définition : *Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ si et seulement si la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.*

Propriété : *Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ alors $E(X) = m \quad V(X) = \sigma^2 \quad \sigma(X) = \sigma$*

Remarque :

- $\approx 68\%$ des valeurs sont dans $[m-\sigma\,;\,m+\sigma]$
  c'est à dire : $P(m-\sigma \leqslant X \leqslant m+\sigma) \simeq 0,68$

- $\approx 95\%$ des valeurs sont dans $[m-2\sigma\,;\,m+2\sigma]$
  c'est à dire : $P(m-2\sigma \leqslant X \leqslant m+2\sigma) \simeq 0,95$

- $\approx 99,7\%$ des valeurs sont dans $[m-3\sigma\,;\,m+3\sigma]$
  c'est à dire : $P(m-3\sigma \leqslant X \leqslant m+3\sigma) \simeq 0,997$