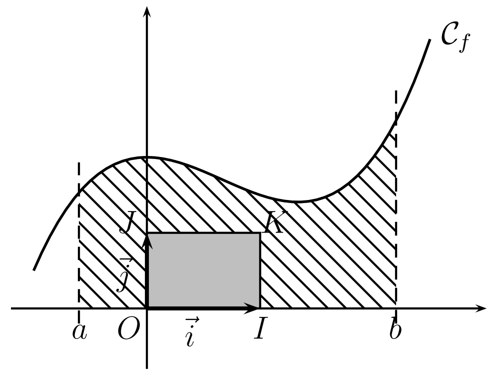
Calcul intégral

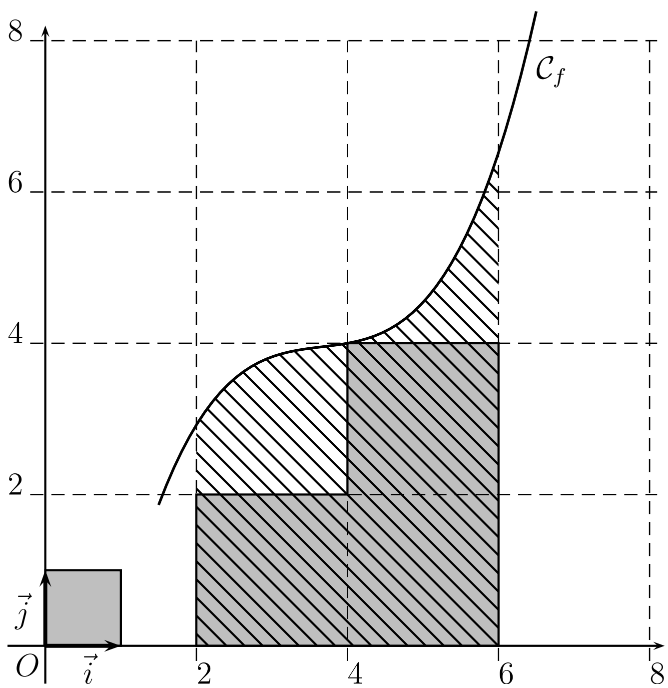
I - Intégrale d'une fonction continue positive sur $[a;b]$

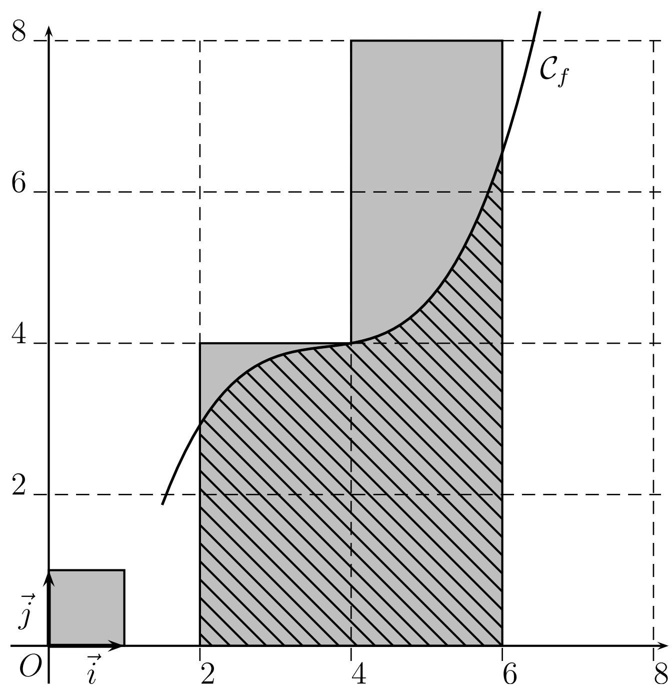
Définition *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.*
On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On appelle intégrale de la fonction f sur $[a;b]$, notée : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, le réel représentant l'aire, en unités d'aire, de la porton du plan limitée par : Cf, (Ox), la droite d'équation $x=a$ et la droite d'équation $x=b$.



Remarques :
On dit aussi aire sous la courbe. C'est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $a \leq x \leq b$, et $0 \leq y \leq f(x)$. L'unité d'aire est donnée par le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$: l'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$.

Exemple : Déterminer un encadrement à l'unité de l'intégrale : $\dots \leq \int_2^6 f(x)dx \leq \dots$





Remarque 1 : La notation $\displaystyle\int^b f(x)\,dx$ fût introduite par Leibniz, et/ou Newton, au XVII^e^ siècle
Remarque 2 : La variable x est dite muette. La lettre qui la désigne n'a pas d'importance :

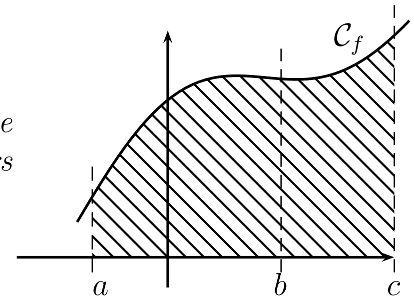
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = \ \dots$$

Remarque 3 : $\int_a^a f(t)\,dt = 0$

Propriété **Linéarité** *Pour toutes fonctions f et g positives et continues sur $[a;b]$ et tout réel λ,*

- $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx =$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx =$

Propriété **Relation de Chasles** *Soit f une fonction continue et positive sur $[a;c]$, et soit b un réel de $[a;c]$, alors* $\int_a^c f(x)\,dx =$



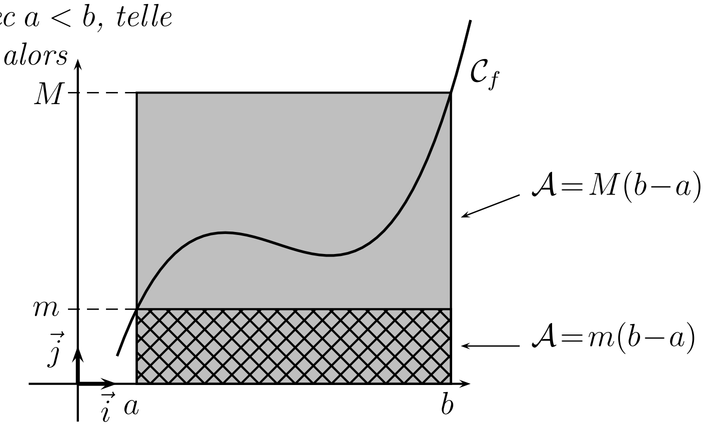
Propriété **Ordre et intégrale**
Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a;b]$ telles que, pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors

Propriété **Inégalités de la moyenne**
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a < b$, telle que, pour tout $x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

ou, de manière équivalente,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$



Démonstration :

Définition **Valeur moyenne d'une fonction**
Soit f continue et positive sur $[a;b]$, avec $a < b$, alors la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le nombre réel :

II - Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

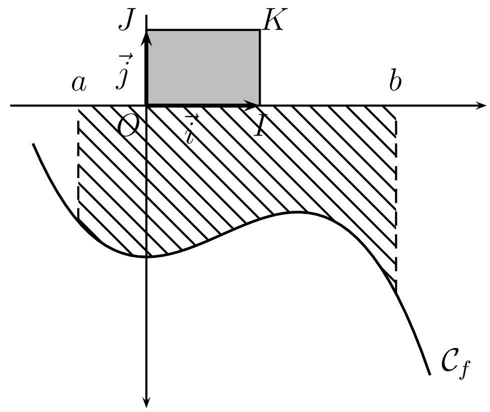
D'une manière plus générale, l'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ est l'aire **algébrique** du domaine compris entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

1) Intégrale d'une fonction continue négative

Soit f une fonction **continue et négative** sur un intervalle $[a;b]$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Dans ce cas, l'intégrale de f de a à b est l'opposé de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_f$:

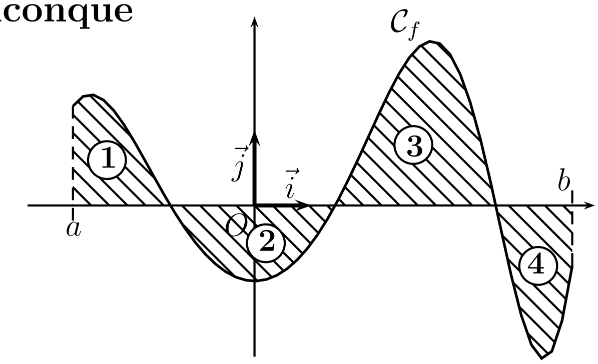
$$\int_a^b f(x)dx = -\text{aire}\,(\mathcal{D})$$



2) Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Pour une fonction f continue de signe quelconque sur un intervalle $[a;b]$, l'intégrale de f est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f garde un signe constant.

$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire}\,(\mathcal{D}_1) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_2) + \text{aire}\,(\mathcal{D}_3) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_4)$$



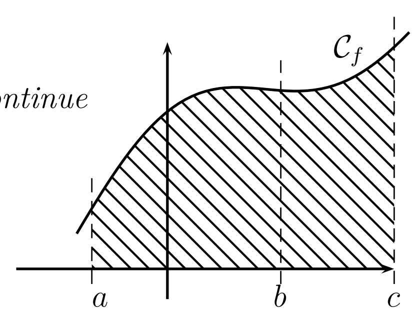
III - Propriétés de l'intégrale

Propriété <u>**Linéarité**</u> *Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a;b]$ et tout réel λ,*

- $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$

Propriété <u>**Relation de Chasles**</u> *Soit f une fonction continue sur $[a;c]$, et soit b un réel de $[a;c]$, alors*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$



Propriété **Positivité**

- *Si* $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [a;b]$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- *Si* $f(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in [a;b]$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

Propriété **Ordre et intégrale**

Soit f *et* g *deux fonctions continues sur* $[a;b]$ *telles que, pour tout* x *de* $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

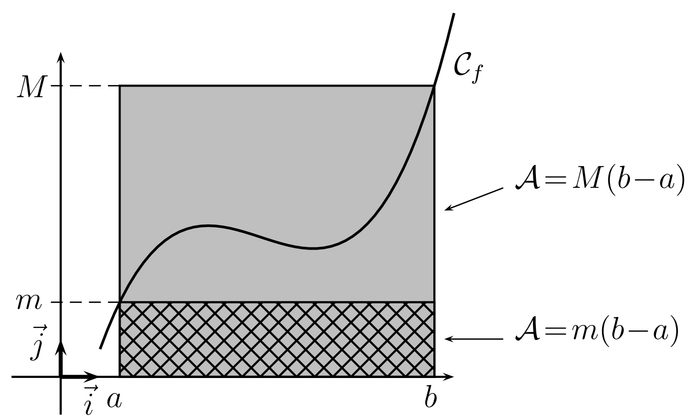
Démonstration : Pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, et donc, $g(x) - f(x) \geq 0$.

D'après la positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b \Big(g(x) - f(x)\Big)\,dx \geq 0$, et donc, d'après la linérarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b \Big(g(x) - f(x)\Big)\,dx = \int_a^b g(x) - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, d'où l'inégalité de la propriété.

Propriété **Inégalités de la moyenne**

Soit f *une fonction continue sur* $[a;b]$, *avec* $a < b$, *telle que, pour tout* $x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$, *alors*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$



On convient de plus que : $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Définition **Valeur moyenne d'une fonction**

Soit f *continue sur* $[a;b]$, *avec* $a < b$, *alors la valeur moyenne de* f *sur* $[a;b]$ *est le nombre réel :*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

IV - Intégrales et primitives

Théorème *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$.*
Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est **l'unique primitive de f sur I s'annulant en** a.

Démonstration : Soit x_0 un réel de I, et h un réel tel que $x_0 + h \in I$. D'après la relation de Chasles :

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0}^{a} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Comme f est continue sur I, f est en particulier continue sur $[x_0; x_0+h]$, et donc

$$\text{pour tout } t \in [x_0; x_0+h], \qquad \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \leq f(t) \leq \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)$$

Comme l'intégral conserve l'ordre des intégrales (ou d'après les inégalités de la moyenne),

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x)dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)dt$$

soit $\qquad (x_0+h-x_0) \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq (x_0+h-x_0) \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)$

c'est-à-dire, $\qquad h \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq h \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)$

ou encore, $\qquad \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)$.

Quand h tend vers 0, l'intervalle $[x_0; x_0+h]$ se réduit à $\{x_0\}$, et donc, comme f est continue en $x_0 \in I$,

$$\lim_{h\to 0} \left(\underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \right) = \lim_{h\to 0} \left(\underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x) \right) = f(x_0)$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$ ce qui signifie exactement que la fonction F est dérivable en x_0, et que $F'(x_0) = f(x_0)$.
Ce raisonnement est valable pour tout $x_0 \in I$, et donc on a bien $F' = f$: F est **une primitive** de f.

On a de plus, $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, et donc, F est **la primitive** de f s'annulant en a.

Exercice 1 Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$.
Déterminer le sens de variation de F.

Propriété *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I, et F une primitive de f sur I. Alors,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

La quantité $F(b) - F(a)$ se note souvent $[F(x)]_a^b$, et ainsi

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Démonstration : Soit $\alpha \in I$, et $F(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,dt$ la primitive de f qui s'annule en α.

On a alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^\alpha f(t)\,dt + \int_\alpha^b f(t)\,dt = -\int_\alpha^a f(t)\,dt + \int_\alpha^b f(t)\,dt = -F(a) + F(b)$.

V - Calcul d'intégrale

1) Recherche de primitive

Primitives des fonctions usuelles

$f(x) =$	$F(x) =$	Intervalle
$k \in \mathbb{R}$	$kx + C$	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + C$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}} + C$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	R_+^*
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Primitives et opérations

f	F
$u'u^n$	$\dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{u^n} + C$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u} + C$
$\dfrac{u'}{u^n}$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}} + C$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$
$u'e^u$	e^u

Exercice 2 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + \dfrac{7}{3}x + 2$ b) $f(x) = -\sin(x) + 2\cos(x)$ c) $f(x) = 2x - 4 + \dfrac{3}{x^2}$

Exercice 3 Déterminer les intégrales suivantes : a) $I = \displaystyle\int_0^1 x^2(x^3-1)^5\,dx$

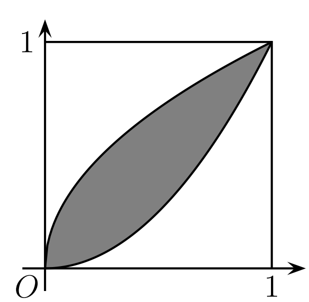
b) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2}\,dx$ c) $K = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ d) $L_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}\,dx$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n$

Exercice 4

Dans un repère orthonormé, on considère le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

(On pourra se rappeler que $\sqrt{x} = x^{1/2}$*)*



Exercice 5 Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = (2-x)(x-1)$ sur $I = [-1; 0]$ b) $g(x) = e^{-3x+1}$ sur $I = [-1; 1]$.

Exercice 6 **Vrai-Faux** Pour chaque affirmation proposée, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Soit f une fonction continue et positive sur $[0;+\infty[$, et soit F et G les fonctions définies $[0;+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ et $G(x)=x\int_1^x f(t)\,dt$. Soit de plus Γ la courbe représentative de f dans un repère.

1. $G(0)=G(1)$
2. G est dérivable sur $[0;+\infty[$, et pour tout $x\in[0;+\infty[$, $G'(x)=F(x)+xf(x)$.
3. On ne peut pas prévoir le sens de variation de G avec les seules informations de l'énoncé.
4. L'aire de la surface délimitée par les droites d'équations $x=0$, $x=2$, $y=0$ et la courbe Γ se calcule par $F(2)+F(0)$.

Exercice 7 **D'après Bac**

Partie A - ROC On supposera connus les résultats suivants : u et v sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $a<b$.

— Si $u\geqslant 0$ sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,dx\geqslant 0$.

— Pour tous nombres α et β, $\displaystyle\int_a^b (\alpha u(x)+\beta v(x))\,dx=\alpha\int_a^b u(x)\,dx+\beta\int_a^b v(x)\,dx$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $a<b$ et si, pour tout nombre réel $x\in[a;b]$, $f(x)\leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)$.

Partie B - Etude d'une suite On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=e^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$u_0=\int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{et, pour tout entier } n\geqslant 1, \quad u_n=\int_0^1 x^n\,f(x)\,dx$$

1. a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $\dfrac{1}{e}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

   b) En déduire que $\dfrac{1}{e}\leqslant u_0\leqslant 1$.
2. Calculer u_1.
3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n$.

   b) Etudier les variations de la suite (u_n).
   En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.

   b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 8 **D'après Bac**

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n=\int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt\,.$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. Dans cette question, *toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par : $\displaystyle I_n=\int_1^n (t+1)\,e^{-t}\,dt$.

a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

c) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $t \mapsto (at+b)e^{-t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto (t+1)e^{-t}$.

   Exprimer alors I_n en fonction de n.

d) En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel.

e) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

2) Intégration par parties (Hors programme terminale S depuis 2011)

Théorème *Intégration par parties Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.*
On suppose de plus que les dérivées u' et v' sont continues sur I. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration : Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.

De plus, les fonctions u, v, u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue, et

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

et donc, comme la fonction uv est une primitive de $(uv)'$, on obtient :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Exercice 9 Calculer les intégrales suivantes :
- $I = \int_0^\pi x\sin(x)dx$ • $J = \int_0^3 xe^x\,dx$ • $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)dx$ • $L = \int_0^\pi (2-2x)\sin(x))\,dx$

Exercice 10 I et J sont les intégrales définies par $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(x)\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\,dx$.

a) En appliquant de deux façons différentes à l'intégrale I la méthode d'intégration par parties, trouver deux relation entre I et J.
b) Calculer alors les intégrales I et J.

Exercice 11 Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx$. A l'aide d'une double intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.

Exercice 12 Soit I la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $I_n = \int_0^1 t^n\,e^{-t}\,dt$.

1. Calcul des premiers termes de la suite
   a) Calculer $I_1 = \int_0^1 te^{-t}dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
   b) Avec la méthode d'intégration par parties, exprimer I_2 en fonction de I_1. En déduire I_2.
   c) Exprimer I_3 en fonction de I_2, puis calculer I_3.
2. Etude de la suite
   a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n \geq 0$.
   b) Etudier le sens de variation de la suite I.
   c) Démontrer que la suite I est convergente.
3. Calcul de la limite de la suite
   a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
   b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n \leq \dfrac{1}{ne}$.
   c) En déduire la limite de la suite I.