DEVOIR SURVEILLE N°4

1 heure

Exercice n°1 : **10 points**

Partie 1

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = e^x - xe^x + 1$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g.

3. Donner le tableau de variations de g.

4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ une unique solution.

On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Démontrer que :

$$e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$$

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ telle que :

$$A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$$

1. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie 1**.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice n°2 : **10 points** Les questions 1) 2) et 3) sont indépendantes.

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x + \cos x$.

a) Donner la valeur exacte de $f\left(\frac{605\pi}{6}\right)$.

b) Vérifier que $f(-\pi) = f(\pi)$. La fonction f est-elle paire ?

c) La fonction f est-elle périodique de période π ?

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

b) Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ l'inéquation : $\cos^2 x - \frac{1}{2} < 0$.

3) Après avoir déterminer la fonction dérivée, étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sin x + \sin(2x)$.