Devoir surveillé n°3

Tle S1 – 2h

Exercice 1 : 4 points Vrai ou Faux **Justifier votre réponse.**

Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et *g* ne s'annulant pas.

1) Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) = 0$.

2) Si *h* est une fonction définie sur $[0;+\infty[$ telle que pour tout $x \in [0;+\infty[$ $0 \leqslant h(x) \leqslant \sqrt{x}$.
alors $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$

3) Si *k* est une fonction définie et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, alors $\lim_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$

4) Soit *f* une fonction telle que pour tout $x>0$ $\frac{-1}{x} \leqslant 3f(x) - 1 \leqslant \frac{1}{x}$.
Cet encadrement permet de déterminer la limite de *f*(*x*) quand *x* temps vers l'infini.

Exercice 2 : 2 points

Soit *f* la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ si $x>0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1) Démontrer que pour tout $x>0$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}$.

2) En déduire que *f* est continue en 0.

Exercice 3 : 6 points

1) Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x + 3$.
   a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α sur $\mathbb{R}$.
   b) Donner une valeur arrondie de α à 10^{-1} près.
   c) En déduire le signe de *g* sur $\mathbb{R}$.

2) Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ \{-1;1} par : $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.
   a) Démontrer que $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variations de *f*.

Exercice n°4 : 8 points

A. Soit *f* la fonction définie sur $]-\infty;4[$ par $f(x) = \frac{4x}{4-x}$. On note C_f sa courbe représentative.

1) Déterminer les limites de *f* en $-\infty$ et en 4. En déduire des asymptotes éventuelles à C_f .
2) Étudier les variations de *f* sur $]-\infty;4[$ et établir son tableau de variations complet.
3) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $]-\infty;4[$.

B. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = -1 \ et \ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{4u_n}{4-u_n}$.

1) a) Calculer u_1, u_2, u_3 .
   b) Conjecturer, en expliquant votre méthode, le sens de variation et la convergence de (u_n).

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = 3 + \frac{2}{u_n}$.
   a) Calculer v_0, v_1, v_2¿
   b) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique : on indiquera sa raison.
   c) Exprimer alors v_n en fonction de *n*.
   d) Montrer l'égalité : $u_n = \frac{2}{v_n - 3}$; en déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.
   e) Justifier alors les conjectures faites à la question 1. a).