

Exercice 1 :

9 points

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $b = 2 - 2i\sqrt{3}$.

1.
 - a. Démontrer que les points A et B sont situés sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
 - b. En vous servant de la partie réelle de leurs affixes, placer A et B.
 - c. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{OA})$.
2. On considère le point C d'affixe $c = -1 - i\sqrt{3}$. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
3.
 - a. Ecrire sous forme trigonométrique le quotient $Z = \frac{a}{b}$.
 - b. En déduire la forme algébrique de Z^{2013} .
4. Soit un point M d'affixe z .
 - a. Interpréter géométriquement $\text{Arg}\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right)$.
 - b. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{z_B - z}{z_A - z}$ soit un nombre réel négatif.

Exercice 2 :

3 points

Déterminer la limite des suites suivantes :

a) $u_n = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ b) $v_n = 3n^2 - 4n + 2$ c) $w_n = \frac{2n^2 - 4n + 5}{3n^2 - 5}$ d) $w_n = \frac{4^n + 3^n}{5^n}$ e) $w_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

Exercice 3 :

8 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.

À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -iz_M$.

On désigne par I le milieu du segment [AM].

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que $BM' = 2OI$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 1 + i\sqrt{3}$.
 - a. Déterminer la forme trigonométrique de z_M .
 - b. Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$.
Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
 - c. Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) en prenant 2 cm pour unité graphique.
Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 l'aide du graphique.
2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.
 - a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y .
 - b. Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y .
 - c. Écrire les coordonnées des points I, B et M'.
 - d. Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
 - e. Montrer que $BM' = 2OI$.