Devoir surveillé n°1

<u>Exercice 1 :</u> 13 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

d. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 0{,}9999$.

e. Déterminer la limite de (u_n).

3. On considère l'algorithme ci-contre.

a) Le faire « fonctionner » dans un tableau avec M = 0,98.

b) Que se passe-t-il si on saisit, pour M, une supérieure ou égale à 1 ?

```
Saisir M
u ← 0,5
n ← 0
Tant que u<M faire :
  u ←3u ÷(1+2u)
  n ←n+1
Fin tant que
Afficher(n)
```

<u>Exercice n°2 :</u> 7 points

On considère la fonction f définie sur $]-2\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{4x-1}{x+2}$.

Soit la suite u définie par $u_0=5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) a) Construire, sur la graphique ci-dessous, les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation de la suite u ?

2) a) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geqslant 1$.

b) Étudier la monotonie de u.

c) Conclure quant-au comportement de u à l'infini.