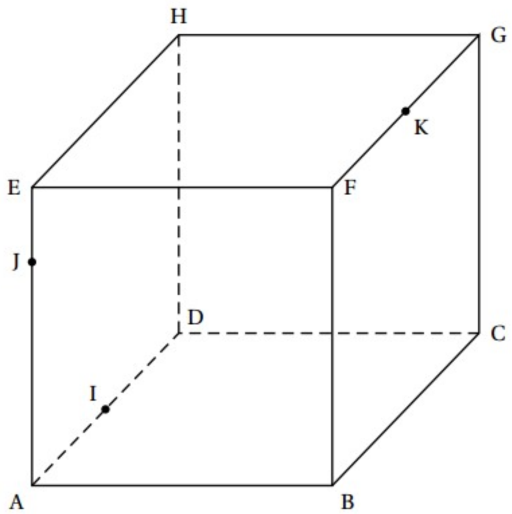
# Devoir surveillé 6

TS1

## Exercice 1 :

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD] ;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ ;
- K est le milieu du segment [FG].




**Partie A**

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).
3. Terminer la section du cube par le plan (IJK).

**Partie B :**

1) Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$

2) En déduire que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=0$

3) On admet que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}=0$ . Démontrer que (AG) est orthogonale au plan (BDE)

## Exercice 2 :

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction $f$ et interpréter graphiquement le résultat.

3. On admet que $f$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.
   a. Démontrer que, pour tout $x$ appartenant à $]0\,;\,+\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{\ln(x)\big(2-\ln(x)\big)}{x^2}.$$
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel $x$ strictement positif.
   c. Calculer $f(1)$ et $f(\mathrm{e}^2)$.

   On obtient alors le tableau de variations ci-dessous.

| $x$ | 0 | | 1 | | $\mathrm{e}^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{4}{\mathrm{e}^2}$ | ↘ | 0 |

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.